OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1907. N° 1

DÉMONSTRATION DE L'IMPOSSIBILITÉ DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE LA SÉRIE DE LAMBERT ET DES SÉRIES ANALOGUES

PAR

C. HANSEN

§ 1. La série de Lambert $\mathfrak{L}(s)$ est définie par l'expression

$$\mathfrak{L}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1-s^n}.$$

Elle est un cas spécial des fonctions:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{rn+t}}{1-s^{rn+t}} \tag{1}$$

où r et t sont des nombres entiers positifs quelconques. Chaque série de la forme (1) est convergente pour toute valeur du variable complexe s, dont le module reste inférieur à l'unité.

Le but de la note suivante est d'étudier le caractère analytique des fonctions (1), et nous allons montrer que le cercle de convergence sera une coupure essentielle pour chaque fonction de cette forme.

Une seule de ces fonctions est déjà traitée dans l'analyse. On sait que Weierstrass[1] a démontré que la fonction:

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+s^{2n}}$$

[1] Weierstrass: Mathematische Werke, Band II, p. 227, ou Weierstrass: Abhandlungen aus der Funktionenlehre, p. 80.

n'existe qu'à l'intérieur du cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité.

La fonction de Weierstrass se laisse écrire comme la différence entre deux fonctions de la forme (1). On a en effet l'identité [1]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+s^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} s^{2n-1}}{1-s^{2n-1}},$$

d'où il suit:

$$\varPhi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{4n-3}}{1-s^{4n-3}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{4n-1}}{1-s^{4n-1}}. \qquad (2)$$

La fonction $\varPhi(s)$ est ainsi la différence entre deux fonctions de la forme (1).

La démonstration de Weierstrass fait appel à une propriété analytique particulière de la fonction $\varPhi(s)$. Cette fonction est liée étroitement à la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2}$ comme le montre l'identité établie par Jacobi [2]:

$$1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+s^{2n}} = \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2}\right)^2; \qquad (3)$$

et c'est à l'aide des théorèmes de la théorie des transformations linéaires des fonctions ϑ que Weierstrass démontre que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2}$ ne pourra être prolongée au-delà du cercle de convergence. La démonstration de Weierstrass est assez compliquée.

§ 2. Pour mettre en évidence que le cercle de convergence est la limite naturelle pour chaque fonction

[1] Voir ma note intitulée: Sur l'excès du nombre des diviseurs etc. Académie royale des sciences et des lettres de Danemark 1906.

[2] Jacobi: Fundamenta nova § 40 l'equation (4) et § 65 l'équation (6).

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{rn+t}}{1 - s^{rn+t}},$$

r et t désignant des nombres entiers positifs quelconques, nous allons étudier la manière dont varie le module de $F(s)$ lorsque s s'approche d'un point de la circonférence suivant le rayon vecteur.

Soit α une racine primitive de l'équation $x^{rm+t} = 1$, m désignant un entier positif quelconque. Nous employons la dénomination de racine primitive en ce sens que la dite racine ne doit pas satisfaire à une équation de la même forme correspondant à une valeur inférieure de m.

Posons:

$$s = \alpha u,$$

u étant une quantité réelle située dans l'intervalle:

$$0 \leqq u < 1.$$

On a alors:

$$F(\alpha u) = \alpha^{r+t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{r[(rm+t)n+1]+t}}{1 - \alpha^{r+t} u^{r[(rm+t)n+1]+t}} \tag{4}$$

$$+ \alpha^{2r+t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{r[(rm+t)n+2]+t}}{1 - \alpha^{2r+t} u^{r[(rm+t)n+2]+t}}$$

$$+ \ldots + \alpha^{(m-1)r+t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{r[(rm+t)n+m-1]+t}}{1 - \alpha^{(m-1)r+t} u^{r[(rm+t)n+m-1]+t}}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{r[(rm+t)n+m]+t}}{1 - u^{r[(rm+t)n+m]+t}}$$

$$+ \alpha^{(m+1)r+t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{r[(rm+t)n+m+1]+t}}{1 - \alpha^{(m+1)r+t} u^{r[(rm+t)n+m+1]+t}}$$

$$+ \ldots + \alpha^{(rm+t)r+t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{r[(rm+t)n+rm+t]+t}}{1 - \alpha^{(rm+t)r+t} u^{r[(rm+t)n+rm+t]+t}}.$$

Chaque terme du second membre a la forme:

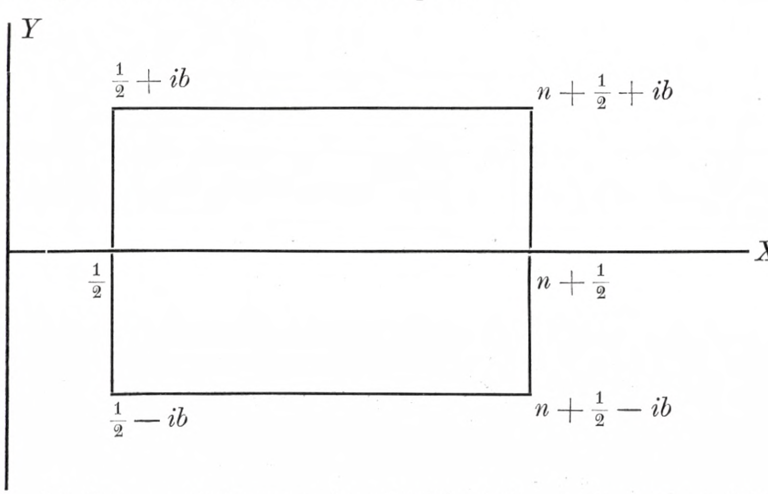
$$f(u) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{pn+q}}{1-\beta u^{pn+q}}, \tag{5}$$

p et q désignant des nombres entiers positifs et β étant une quantité complexe dont le module est 1, à l'exception d'un seul terme, dans lequel β a la valeur de l'unité.

La démonstration que nous allons établir repose sur l'expression de la série (5) par une intégrale définie. Nous faisons usage du procédé employé par M. J. Petersen [1]) pour évaluer la somme de la série $\sum_{n=1}^{n} \varphi(n)$ et nous considérons l'intégrale:

$$\int \frac{\beta u^{pz+q}}{1-\beta u^{pz+q}} \cdot \frac{dz}{e^{2\pi i z}-1}$$

prise dans le sens positif le long du contour d'un rectangle dont les côtés, parallèles aux axes, passent par les points $\frac{1}{2}$, $n+\frac{1}{2}$, bi, $-bi$, n désignant un nombre entier positif quelconque et b une quantité réelle positive.



[1] J. Petersen: Vorlesungen über Funktionentheorie, Kopenhagen 1898, p. 161. Voir aussi les remarques historiques de M. Lindelöf dans son

Nous convenons de prendre pour u^z la valeur de e^{zlu}, où lu est fixé de telle manière qu'il prenne des valeurs réelles pour des valeurs réelles positives de u.

La fonction sous le signe $\int$ admet comme pôles dans l'intérieur du rectangle les points $z = 1, 2, 3 \ldots . n$ et en outre les points singuliers de la fonction $\dfrac{u^{pz+q}}{1 - \beta u^{pz+q}}$ situés dans ce rectangle. Supposons que u soit une quantité réelle positive. Tous les pôles de la fonction, $\dfrac{u^{pz+q}}{1 - \beta u^{pz+q}}$ sont de la forme:

$$z = -\frac{q}{p} + i \cdot \frac{2p_1\pi - \varphi}{p\,lu}$$

en posant $\beta = e^{i\varphi}$, p_1 étant un nombre entier quelconque. Or p et q sont du même signe et par conséquent tous ces pôles sont extérieurs au rectangle. D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale se réduit à la somme des intégrales prises sur des circonférences infiniment petites ayant leurs centres aux points $1, 2, \ldots . n$.

On voit tout de suite que le résidu de la fonction sous le signe $\int$ relatif au pôle $z = n_1$, n_1 désignant un nombre entier quelconque, a la valeur:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\beta u^{pn_1+q}}{1 - \beta u^{pn_1+q}}.$$

Nous avons ainsi:

$$\sum_{n_1=1}^{n_1=n} \frac{\beta u^{pn_1+q}}{1 - \beta u^{pn_1+q}} = \int \frac{\beta u^{pz+q}}{1 - \beta u^{pz+q}} \cdot \frac{dz}{e^{2\pi iz} - 1},$$

l'intégrale étant prise le long du contour du rectangle.

mémoire intitulé: Quelques applications d'une formule sommatoire générale, Acta societatis scientiarum fennicae, t. XXXI, 1902, p. 9, ou E. Lindelöf: Le calcul des résidus, Paris 1905, p. 68.

Nous allons exprimer cette intégrale d'une autre manière. En employant le procédé de M. Petersen, nous divisons le chemin d'intégration en deux parties: celle située au-dessus de l'axe des x que nous désignons par C et celle située au-dessous. Sur le chemin C l'intégrale peut s'écrire:

$$\int_{(C)} \frac{\beta u^{pz+q}}{1-\beta u^{pz+q}} \cdot \frac{e^{2\pi iz}}{e^{2\pi iz}-1} dz - \int_{(C)} \frac{\beta u^{pz+q}}{1-\beta u^{pz+q}} dz$$

et on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=1}^{n_1=n} \frac{\beta u^{pn_1+q}}{1-\beta u^{pn_1+q}} = {} & i\int_0^b \frac{\beta u^{p(\frac{1}{2}-iy)+q}}{1-\beta u^{p(\frac{1}{2}-iy)+q}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} \qquad (6) \\
& + \int_0^n \frac{\beta u^{p(x+\frac{1}{2}-ib)+q}}{1-\beta u^{p(x+\frac{1}{2}-ib)+q}} \cdot \frac{-dx}{e^{2\pi b+2\pi ix}+1} \\
& + i\int_b^0 \frac{\beta u^{p(n+\frac{1}{2}-iy)+q}}{1-\beta u^{p(n+\frac{1}{2}-iy)+q}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} \\
& + i\int_0^b \frac{\beta \,.\, u^{p(n+\frac{1}{2}+iy)+q}}{1-\beta u^{p(n+\frac{1}{2}+iy)+q}} \cdot \frac{e^{-2\pi y}dy}{e^{-2\pi y}+1} \\
& + \int_n^0 \frac{\beta u^{p(x+\frac{1}{2}+ib)+q}}{1-\beta u^{p(x+\frac{1}{2}+ib)+q}} \cdot \frac{e^{2\pi ix-2\pi b}}{e^{2\pi ix-2\pi b}+1} dx \\
& + i\int_b^0 \frac{\beta u^{p(\frac{1}{2}+iy)+q}}{1-\beta u^{p(\frac{1}{2}+iy)+q}} \cdot \frac{e^{-2\pi y}dy}{e^{-2\pi y}+1} \\
& - \int_{(C)} \frac{\beta u^{pz+q}}{1-\beta u^{pz+q}} dz.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse faite sur u la fonction $\dfrac{\beta u^{pz+q}}{1-\beta u^{pz+q}}$ n'admet pas de pôles dans l'intérieur du rectangle et nous pouvons remplaçer l'intégrale:

$$-\int_{(C)} \frac{\beta \cdot u^{pz+q}}{1-\beta u^{pz+q}} dz \text{ par } \int \frac{\beta u^{pz+q}}{1-\beta u^{pz+q}} dz,$$

cette dernière intégrale prise sur l'axe des x du point $\frac{1}{2}$ jusqu'à $n+\frac{1}{2}$.

Laissons maintenant la quantité b augmenter indéfiniment. Les intégrales:

$$\int_0^n \frac{\beta u^{p(x+\frac{1}{2}-ib)+q}}{1-\beta u^{p(x+\frac{1}{2}-ib)+q}} \cdot \frac{dx}{e^{2\pi ix} \cdot e^{2\pi b}+1}$$

et

$$\int_n^0 \frac{\beta \cdot u^{p(x+\frac{1}{2}+ib)+q}}{1-\beta \cdot u^{p(x+\frac{1}{2}+ib)+q}} \cdot \frac{e^{2\pi ix} \cdot e^{-2\pi b}\, dx}{e^{2\pi ix} \cdot e^{-2\pi b}+1}$$

tendent alors vers zéro, et l'équation (6) peut s'écrire:

$$\sum_{n_1=1}^{n_1=n} \frac{\beta u^{pn_1+q}}{1-\beta u^{pn_1+q}}$$

$$= i\int_0^\infty \left[\frac{\beta u^{p(\frac{1}{2}-iy)+q}}{1-\beta u^{p(\frac{1}{2}-iy)+q}} - \frac{\beta u^{p(\frac{1}{2}+iy)+q}}{1-\beta u^{p(\frac{1}{2}+iy)+q}}\right] \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$+ i\int_0^\infty \left[\frac{\beta u^{p(n+\frac{1}{2}+iy)+q}}{1-\beta u^{p(n+\frac{1}{2}+iy)+q}} - \frac{\beta u^{p(n+\frac{1}{2}-iy)+q}}{1-\beta u^{p(n+\frac{1}{2}-iy)+q}}\right] \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\beta u^{pz+q}}{1-\beta u^{pz+q}}\, dz.$$

En réduisant les expressions sous les signes $\int$ on obtient la formule:

$$\sum_{n_1=1}^{n_1=n} \frac{\beta u^{pn_1+q}}{1-\beta u^{pn_1+q}} = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\beta u^{pz+q}}{1-\beta u^{pz+q}}\, dz \tag{7}$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{\beta u^{\frac{p}{2}+q} \sin pylu}{1-2\beta u^{\frac{p}{2}+q} \cos pylu + \beta^2 u^{p+2q}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$- 2\int_0^\infty \frac{\beta u^{pn+\frac{p}{2}+q} \sin pylu}{1-2\beta u^{pn+\frac{p}{2}+q} \cos pylu + \beta^2 u^{2pn+p+2q}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Supposons maintenant:

$$0 < u < 1$$

et faisons augmenter indéfiniment le nombre n dans l'équation précédente.

En remarquant que:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\beta u^{pz+q} dz}{1-\beta u^{pz+q}} = -\left[\frac{l(1-\beta u^{pz+q})}{p\, lu}\right]_{\frac{1}{2}}^{\infty} = \frac{l(1-\beta u^{\frac{p}{2}+q})}{p\, lu},$$

nous avons ainsi établi la formule:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta u^{pn+q}}{1-\beta u^{pn+q}} = \frac{l(1-\beta u^{\frac{p}{2}+q})}{p\, lu} \tag{8}$$

$$+2\int_0^{\infty} \frac{\beta u^{\frac{p}{2}+q} \sin pylu}{1-2\beta u^{\frac{p}{2}+q} \cos pylu + \beta^2 u^{p+2q}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

où le logarithme a sa détermination principale. Cette formule est applicable pour des valeurs réelles de u, qui sont situées dans l'intervalle $0 < u < 1$.

En substituant cette expression à la série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta u^{pn+q}}{1-\beta u^{pn+q}}$$

dans l'équation (4), elle prendra la forme:

$$F(\alpha u) = \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{\alpha^{rp+t} u^{rp+t}}{1-\alpha^{rp+t} u^{rp+t}} + \sum_{p=m+1}^{p=rm+t} \frac{\alpha^{rp+t} u^{rp+t}}{1-\alpha^{rp+t} u^{rp+t}} + \frac{u^{rm+t}}{1-u^{rm+t}} \tag{9}$$

$$+\frac{1}{r(rm+t)lu} \sum_{p=1}^{p=rm+t} l(1-\alpha^{rp+t} u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t})$$

$$+2\sum_{p=1}^{p=rm+t} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{rp+t} u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t} \sin r(rm+t) y\, lu}{1-2\alpha^{rp+t} u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t} \cos r(rm+t) y\, lu + \alpha^{2rp+2t} \cdot u^{r(rm+t)+2pr+2t}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

Cette formule nous permettra sans peine d'étudier le module de $F(\alpha u)$, lorsque u tend vers l'unité.

Posons pour simplifier l'écriture:

$$F(\alpha u)=F_1+\frac{1}{r(rm+t)lu}\cdot\left[\frac{r(rm+t)u^{rm+t}lu}{1-u^{rm+t}}+F_2+F_3\right], \tag{10}$$

où

$$F_1=\sum_{p=1}^{p=m-1}\frac{\alpha^{rp+t}u^{rp+t}}{1-\alpha^{rp+t}u^{rp+t}}+\sum_{p=m+1}^{p=rm+t}\frac{\alpha^{rp+t}u^{rp+t}}{1-\alpha^{rp+t}u^{rp+t}},$$

$$F_2=\sum_{p=1}^{p=rm+t}l\left(1-\alpha^{rp+t}u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\right),$$

$$F_3=2\sum_{p=1}^{p=m-1}\int_0^\infty\frac{r(rm+t)\cdot lu\cdot\alpha^{rp+t}\cdot u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\sin r(rm+t)y\,lu}{1-2\alpha^{rp+t}u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\cos r(rm+t)y\,lu+\alpha^{2rp+2t}u^{r(rm+t)+2pr+2t}}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$+2\sum_{p=m+1}^{p=rm+t}\int_0^\infty\frac{r(rm+t)lu\cdot\alpha^{rp+t}\cdot u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\cdot\sin r(rm+t)y\,lu}{1-2\alpha^{rp+t}u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\cos r(rm+t)y\,lu+\alpha^{2rp+2t}u^{r(rm+t)+2pr+2t}}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$+2r(rm+t)\int_0^\infty\frac{lu\cdot u^{\left(\frac{r}{2}+1\right)(rm+t)}\sin r(rm+t)y\,lu}{1-2u^{\left(\frac{r}{2}+1\right)(rm+t)}\cos r(rm+t)y\,lu+u^{(r+2)(rm+t)}}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}. \tag{11}$$

Quant à la quantité F_1 on voit tout de suite qu'elle est finie et continue dans l'intervalle:

$$0\leqq u\leqq 1.$$

D'ailleurs on voit que la limite de $\frac{r(rm+t)u^{rm+t}lu}{1-u^{rm+t}}$ pour $u=1$ est -1. Considérons alors la quantité F_2. On a:

$$F_2=\sum_{p=1}^{p=m-1}l\left(1-\alpha^{rp+t}u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\right)$$

$$+\sum_{p=m+1}^{p=rm+t}l\left(1-\alpha^{rp+t}u^{\frac{r}{2}(rm+t)+pr+t}\right)+l\left(1-u^{\left(\frac{r}{2}+1\right)(rm+t)}\right).$$

Le second membre de cette expression est divisé en trois parties dont les deux premières ont une valeur finie pour $u = 1$, mais dont la troisième croît indéfiniment quand u tend vers l'unité. Le module de F_2 croît par conséquent aussi vers l'infini quand on fait tendre u vers l'unité.

Il nous reste alors à considérer la quantité F_3. Le second membre de l'expression (11) est aussi divisé en trois parties, dont les deux premières sont composées d'un nombre fini d'intégrales définies dont chacune prend la valeur de zéro pour $u = 1$. Quant à l'intégrale:

$$\int_0^\infty \frac{lu \cdot \sin \mu y\, lu}{1 - 2u^k \cos \mu y\, lu + u^{2k}} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y} + 1}$$

qui est la troisième partie (pour abréger nous avons posé $r(rm + t) = \mu$, $\left(\frac{r}{2} + 1\right)(rm + t) = k$) on voit que la fonction sous le signe $\int$ prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $u = 1$. Or elle a une vraie valeur finie, ce qu'on voit par un calcul élémentaire. Il suit de là que la quantité F_3 est finie dans l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$, et nous avons ainsi mis en évidence que la quantité:

$$\frac{r(rm + t)\, u^{rm + t}\, lu}{1 - u^{rm + t}} + F_2 + F_3$$

a un module qui surpasse chaque limite finie quand u tend vers l'unité.

Regardons alors l'équation (10). D'après les remarques faites ci-dessus, on conclut que le module de $F(au)$ croît à l'infini quand u tend vers l'unité, c'est-à-dire que le module de $F(z)$ croît indéfiniment quand le variable z s'approche d'un point du cercle de convergence $z = e^{\frac{2p\pi i}{rm + t}}$ suivant le rayon vecteur.

Or, sur un arc de la circonférence aussi petit qu'on voudra, il y a un nombre infini de ces points et par conséquent la fonction $F(z)$ ne pourra être prolongée au-delà de ce cercle.

§ 3. Appliquons les résultats obtenus aux fonctions spéciales de la forme (1).

Comme première application, nous considérons la série de Lambert:

$$\mathfrak{L}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1-s^n}.$$

D'après le théorème énoncé ci-dessus, le cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité est la limite naturelle pour cette fonction. En la développant suivant des puissances de s on aura la série:

$$\mathfrak{L}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} T(n) s^n$$

en désignant par $T(n)$ le nombre des diviseurs de n.

Les formules établies dans le paragraphe précédent permettent de faire la somme de la série $\mathfrak{L}(s)$ par une intégrale définie. En vertu de l'équation (8) on a l'expression:

$$\mathfrak{L}(s) = \frac{l(1-\sqrt{s})}{ls} + 2\sqrt{s}\int_0^{\infty} \frac{\sin yls}{1-2\sqrt{s}\cos yls + s} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}, \tag{12}$$

applicable pour des valeurs de s réelles, positives et inférieures á 1. Le logarithme a sa détermination principale.

On conclut de cette formule qu'on a:

$$\operatorname*{Lim}_{s=1} \frac{ls}{l(1-\sqrt{s})} \cdot \mathfrak{L}(s) = 1; \tag{13}$$

car en cherchant la limite de la fonction sous le signe $\int$ multipliée par ls, on arrive à l'expression:

$$\operatorname*{Lim}_{s=1} \frac{ls \cdot \sin yls}{1-2\sqrt{s}\cos yls + s} = \frac{4y}{1+4y^2} \tag{14}$$

par un calcul élémentaire, et on a par conséquent:

$$\operatorname*{Lim}_{s=1} \frac{ls}{l(1-\sqrt{s})}\int_0^{\infty} \frac{\sin yls}{1-2\sqrt{s}\cos yls + s} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} = 0.$$

De la formule (12) on tire aussi:

$$\lim_{s=1}\left\{ls \cdot \mathfrak{L}(s) - l(1-\sqrt{s})\right\} = K \tag{15}$$

en désignant par K la constante

$$8\int_0^\infty \frac{y}{1+4y^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

On obtient une limite supérieure pour K en remarquant que

$$\frac{y}{1+4y^2} \leqq \frac{1}{4}$$

dans toute l'intervalle d'intégration, d'où il résulte:

$$K < 2\int_0^\infty \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} = \frac{l2}{\pi}.$$

L'équation (15) se laisse aussi énoncer de la manière suivante: la fonction $ls \cdot \mathfrak{L}(s)$ peut s'exprimer asymptotiquement par l'expression:

$$ls \cdot \mathfrak{L}(s) = l(1-\sqrt{s}) + K. \tag{16}$$

A cause du rôle que joue la série de Lambert dans la théorie du nombre et qui est une conséquence de son développement en série de Taylor, cette fonction a été traitée plusieurs fois dans l'analyse[1] et des expressions asymptotiques ont été trouvées par Schlömilch[2] et Cesaro[3], qui sont parvenus aux résultats suivants:

[1] Schlömilch est le premier qui ait fait la somme de la série de Lambert en donnant la formule (voir [2]):

$$\mathfrak{L}(s) = \frac{C - ll\frac{1}{s}}{l\frac{1}{s}} + \frac{1}{4} - \frac{B_1^2}{2 \cdot 2!}\, l\frac{1}{s} - \frac{B_3^2}{4 \cdot 4!}\left(l\frac{1}{s}\right)^3 \ldots + R_n.$$

La valeur du terme complémentaire indiquée par Schlömilch n'est pas exacte, comme le démontre Stieltjes dans son mémoire intitulé: Recherches sur quelques séries semi-convergentes, Annales de l'école normale supérieure, t. III, 1886, p. 254.

[2] Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrg. 6, 1861, p. 407.

[3] Cesaro: La serie di Lambert in Aritmetica assintotica, Rendiconti della Reale Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, 1893.

$$\operatorname*{Lim}_{s=1} \frac{(1-s)\mathfrak{L}(s)}{l\dfrac{1}{1-s}} = 1$$

et les expressions asymptotiques:

$$\mathfrak{L}(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+s}{1-s}\left(l\frac{1}{1-s}+C\right)-\frac{1}{4}$$

$$\mathfrak{L}(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+s}{1-s}\cdot l\frac{1+s}{1+s-2s^2}+\frac{s}{1-s}-\frac{s^3\varepsilon(s)}{6(1-s)}.$$

C est la constante d'Euler et $\varepsilon(s)$ désigne une quantité plus petite que 1.

On voit que l'expression (16) que nous avons établie est d'application plus simple que les développements ci-dessus.

La série de Lambert est étroitement liée à la fonction

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{1+s^n}.$$

On vérifie immédiatement qu'on a:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{1+s^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{1-s^n} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^{2n}}{1-s^{2n}}$$

ou

$$\varphi(s) = \mathfrak{L}(s) - 2\,\mathfrak{L}(s^2).$$

Il en résulte que la série de Taylor de la fonction $\varphi(s)$ suivant des puissances de s sera:

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}T(n)s^n - 2\sum_{n=1}^{\infty}T(n)s^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\{T(2n)-2\,T(n)\}s^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}T(2n-1)s^{2n-1}.$$

En vertu de la formule (12) on a:

$$\varphi(s) = \frac{l(1-\sqrt{s})}{ls} - \frac{l(1-s)}{ls} + 2\int_0^{\infty}\left\{\frac{\sqrt{s}\sin yls}{1-2\sqrt{s}\cos yls+s} - \frac{2s\sin 2yls}{1-2s\cos 2yls+s^2}\right\}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}; \qquad (17)$$

mais:

$$\begin{aligned}1 - 2s\cos 2yls + s^2 &= 1 - 4s\cos^2 yls + 2s + s^2\\ &= (1+s)^2 - (2\sqrt{s}\cos yls)^2\end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\frac{\sqrt{s}\sin yls}{1 - 2\sqrt{s}\cos yls + s} - \frac{4s\sin yls\cos yls}{(1+s)^2 - (2\sqrt{s}\cos yls)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{s}\sin yls\,[1 + s + 2\sqrt{s}\cos yls] - 4s\sin yls\cos yls}{(1+s)^2 - (2\sqrt{s}\cos yls)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{s}\sin yls\cdot[1 + s - 2\sqrt{s}\cos yls]}{(1+s)^2 - (2\sqrt{s}\cos yls)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{s}\sin yls}{1 + s + 2\sqrt{s}\cos yls}.$$

En substituant cette expression dans l'équation (17), elle se réduit à la suivante:

$$\varphi(s) = -\frac{l(1+\sqrt{s})}{ls} + 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}\sin yls}{1 + s + 2\sqrt{s}\cos yls}\cdot\frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

En faisant tendre s vers l'unité, on obtient la limite:

$$\operatorname*{Lim}_{s=1}\left[\varphi(s) + \frac{l(1+\sqrt{s})}{ls}\right] = 0,$$

c'est-à-dire qu'on a le développement asymptotique bien simple:

$$\varphi(s) = -\frac{l(1+\sqrt{s})}{ls}.$$

Nous allons encore établir une formule assez remarquable relative à la fonction $\mathfrak{L}(-s)$.

De l'identité:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{1-s^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^{2n}}{1-s^{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^{2n-1}}{1-s^{2n-1}}$$

on tire:

$$\mathfrak{L}(-s) = \mathfrak{L}(s^2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^{2n-1}}{1+s^{2n-1}}. \tag{18}$$

En appliquant la formule (8), on obtient l'expression:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{2n+1}}{1+s^{2n+1}} = -\frac{l(1+s^2)}{2ls}$$

$$+ 2\int_0^{\infty} \frac{s^2 \sin 2yls}{1+2s^2\cos 2yls + s^4} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

et l'équation pourra s'écrire:

$$\mathfrak{L}(-s) = \frac{l(1-s)}{2ls} + 2\int_0^{\infty} \frac{s \sin 2yls}{1-2s\cos 2yls + s^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}$$

$$-\frac{s}{1+s} + \frac{l(1+s^2)}{2ls} - 2\int_0^{\infty} \frac{s^2 \sin 2yls}{1+2s^2\cos 2yls + s^4} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

En cherchant la limite de $ls \cdot \mathfrak{L}(-s)$ pour $s = 1$, on obtiendra l'expression asymptotique:

$$ls \cdot \mathfrak{L}(-s) = \frac{1}{2}l(1-s) + \frac{1}{2}l(1+s^2) + \frac{1}{2}K.$$

K désigne la même constante que dans l'équation (15).

§ 4. Nous allons encore faire une application des résultats qui précèdent à la fonction $\Phi(s)$ de Weierstrass:

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+s^{2n}}.$$

En développant cette fonction suivant des puissances de s, on aura[1]:

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \{T_3(n) - T_1(n)\} s^n$$

où $T_3(n)$ et $T_1(n)$ désignent combien de diviseurs il y a dans le nombre n sous les formes $4p-3$ et $4p-1$; p sera un nombre entier positif.

[1] Voir la note de l'auteur citée p. 4.

A l'aide de l'identité (2) et en vertu de la formule (8) on pourrait exprimer la fonction $\Phi(s)$ par une intégrale définie, mais il sera plus simple de considérer l'intégrale:

$$\int \frac{s^z}{1+s^{2z}} \cdot \frac{dz}{e^{2\pi i z}-1}$$

prise le long du rectangle indiqué au paragraphe 2 et d'appliquer le même procédé que nous avons suivi dans ce paragraphe. Alors nous revenons à la formule:

$$\Phi(s) = -\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{s}}{ls} + 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}\cdot(1-s)\sin y\, ls}{1+2s\cos 2y\, ls + s^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} \tag{19}$$

valable pour des valeurs de s qui sont situées dans l'intervalle $0 < s < 1$.

En faisant tendre s vers l'unité, on obtient l'expression asymptotique:

$$\Phi(s) = -\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s}}{ls}.$$

Envisageons maintenant l'identité (3) due à Jacobi:

$$1 + 4\Phi(s) = \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2}\right)^2.$$

L'expression (19) montre qu'on a:

$$\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2}\right)^2 = 1 - \frac{4\operatorname{arctg}\sqrt{s}}{ls}$$
$$+ 8\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}(1-s)\sin y\, ls}{1+2s\cos 2y\, ls+s^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}.$$

En cherchant la limite pour $s = 1$, on aura:

$$\lim_{s=1}\left[\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{4\operatorname{arctg}\sqrt{s}}{ls}\right)\right] = 0$$

et par conséquent on a asymptotiquement:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4 \operatorname{arctg} \sqrt{s}}{l s}}.$$

Cette expression asymptotique est plus précise que l'expression bien connue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-s}}$$

et qui est dûe à Cesaro[1]; car on trouvera aisément qu'on a:

$$\lim_{s=1} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4 \operatorname{arctg} l s}{l s}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-s}}} = 0.$$

[1] Cesaro: Sulla determinazione assintotica della serie di potenze, Rendiconti della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, 1893.

Copenhague, le 2 novembre 1906.